

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 10.01.2023

Parte I - Testo I

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

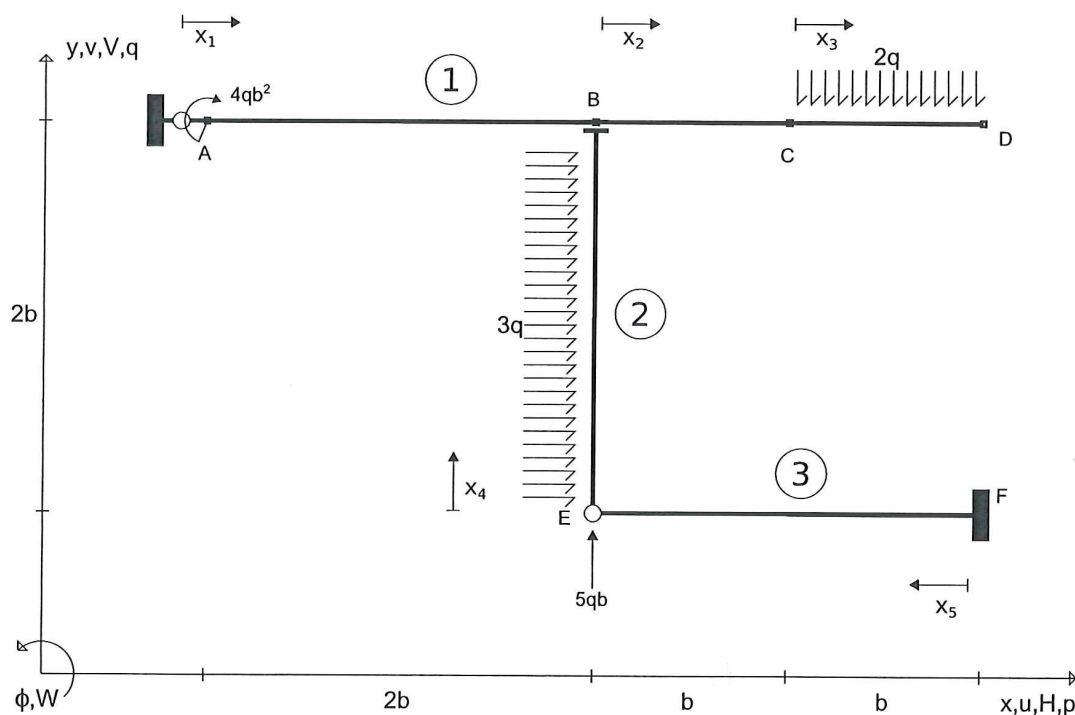
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le *equazioni* delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 10.01.23*001



Eq. AUXILIARE:

$$\begin{cases} R_x^{(1)} = 0 & R_x^{(2+3)} = 0 \\ M_z^{(3)} = 0 & M_z^{(1+2)} = 0 \end{cases}$$

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_A applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

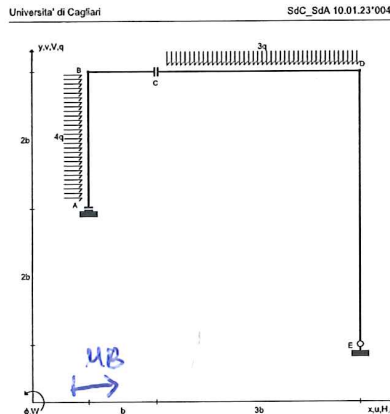
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1 , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2 , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12} ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto B , u_B , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto C relativa al corpo 1, $v_C^{(1)}$.

Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto D , M_D .

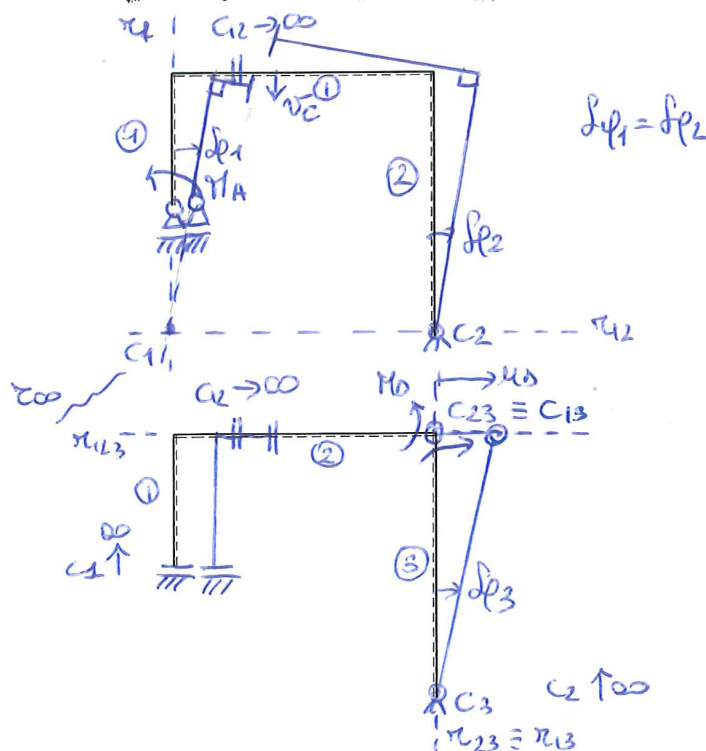
In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste ABC , CD , DE) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto D , u_D , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto B , v_B .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.



$$\begin{cases} C_1 \in \pi_1 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_1 \in \pi_{12} \end{cases}$$



$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_2 \leftrightarrow C_2 & C_2 \in \pi_{20} \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 & C_2 \in \pi_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 & C_{13} \in \pi_{13} \\ C_{12} \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_{13} & C_{13} \in \pi_{23} \end{cases}$$

$$M_A(\hat{\varphi}) = \frac{21}{2} q b^2; C_1 = (0, -2b); C_2 = (4b, -2b); C_{12} = (\infty, 0);$$

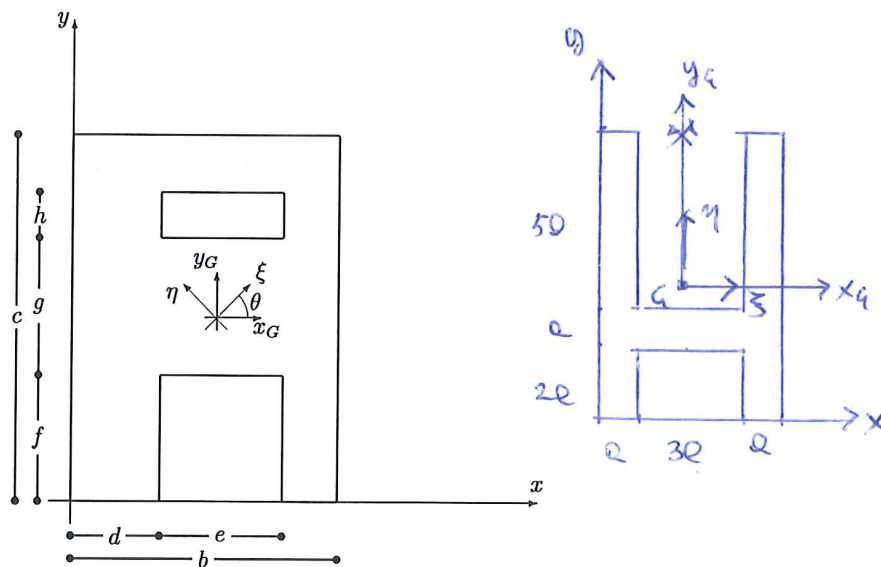
$$u_B = 4b \delta \varphi_1; v_C^{(I)} = -b \delta \varphi_1;$$

$$M_D(\hat{\varphi} \square \hat{\varphi}) = -32 q b^2; u_D = 4b \delta \varphi_3; v_B = 0;$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: *Si noti che il disegno non è in scala!*) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 5a$; $c = 8a$; $d = 1a$; $e = 3a$; $f = 2a$; $g = a$; $h = 5a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del doppio dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



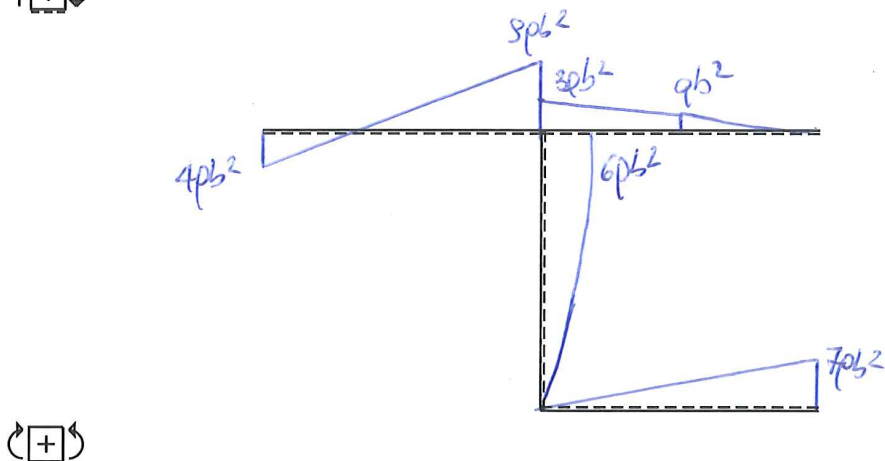
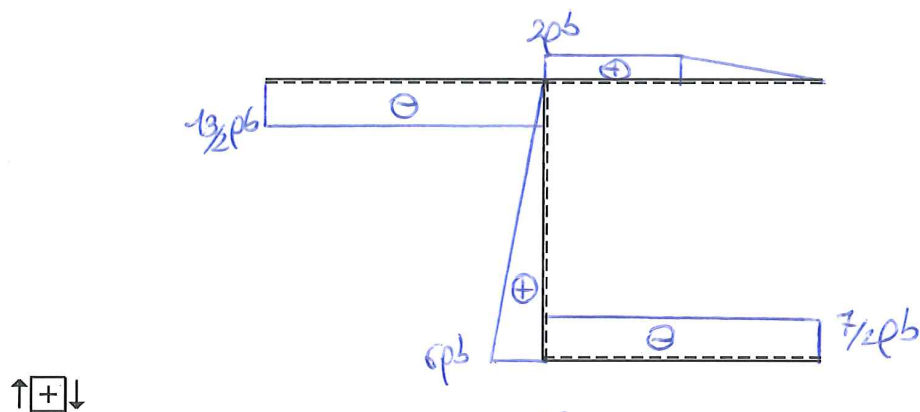
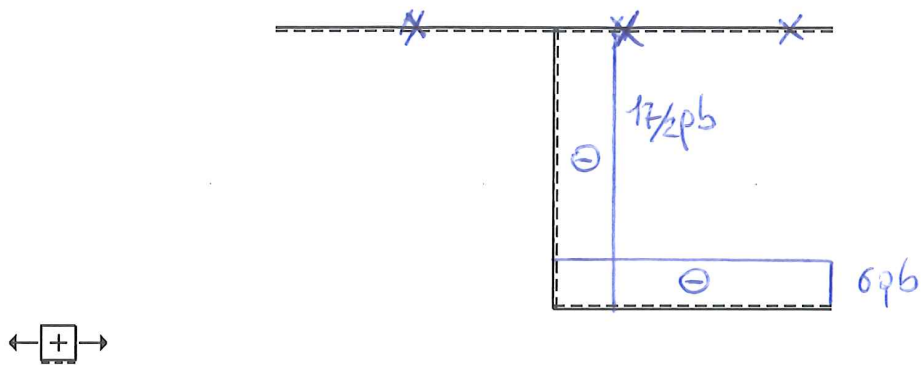
$$S_x = \frac{143}{2} e^3 = 71,500 e^3; S_y = \frac{95}{2} e^3 = 47,500 e^3;$$

$$x_G = \frac{5}{2} e = 2,500 e; y_G = \frac{143}{38} e = 3,763 e;$$

$$J_{xG} = \frac{20803}{228} e^4 = 91,267 e^4; J_{yG} = \frac{811}{12} e^4 = 67,583 e^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0 \quad [2\theta = 0^\circ];$$

$$J_\xi = J_{\max} = \frac{20808}{228} e^4; J_\eta = J_{\min} = \frac{811}{12} e^4;$$



$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= -13/2 qb; & H_F (\Rightarrow) &= -6qb; & V_F (\uparrow) &= 7/2 qb; & M_F (\curvearrowright) &= -7qb^2; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= -13/2 qb; & M_{AB} &= 4qb^2 - 13/2 qb \times 1; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= 2qb; & M_{BC} &= -3qb^2 + 2qb \times 2; \\
 N_{CD} &= //; & T_{CD} &= 2qb - 2q \times 3; & M_{CD} &= -qb^2 + 2qb \times 3 - q \times 3^2; \\
 N_{EB} &= -17/2 qb; & T_{EB} &= 6qb - 3q \times 4; & M_{EB} &= 6qb \times 4 - 3/2 q \times 4^2; \\
 N_{FE} &= -6qb; & T_{FE} &= -7/2 qb; & M_{FE} &= 7qb^2 - 7/2 qb \times 5;
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 10.01.2023

Parte I - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

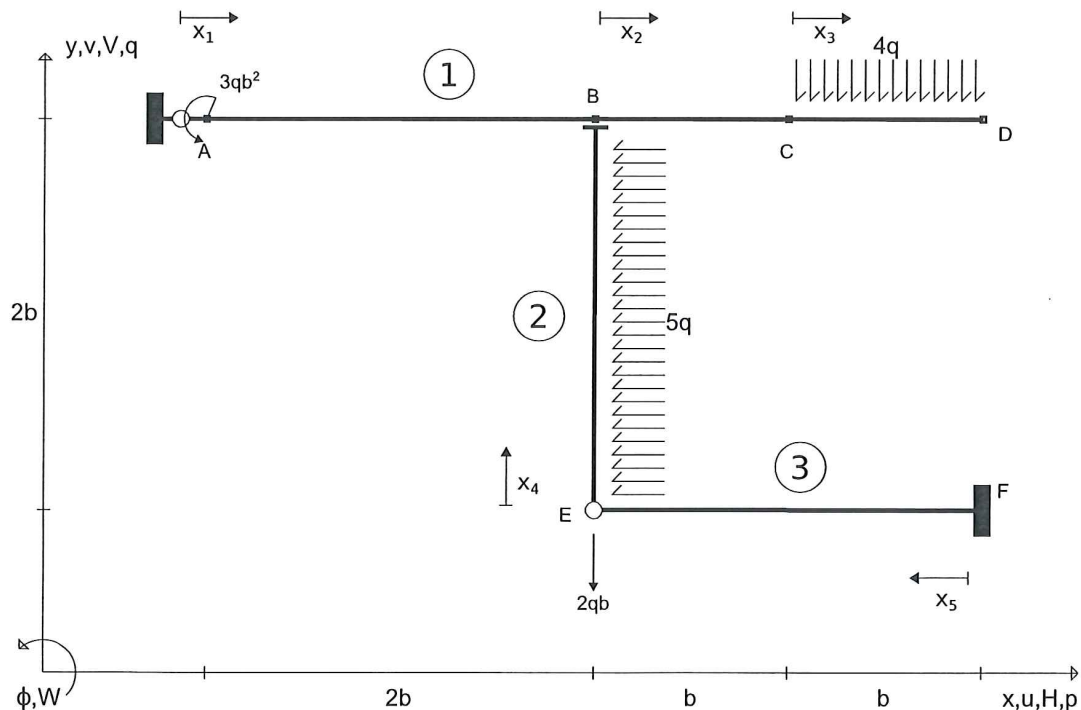
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le *equazioni* delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 10.01.23*002



EQ. AUGUSTE

$$\begin{cases} R_x^{(1)} = 0 & R_x^{(2+3)} = 0 \\ R_z^{(3)} = 0 & R_z^{(42)} = 0 \end{cases}$$

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_A applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1 , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2 , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12} ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto B , u_B , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto C relativa al corpo 1, $v_C^{(1)}$.

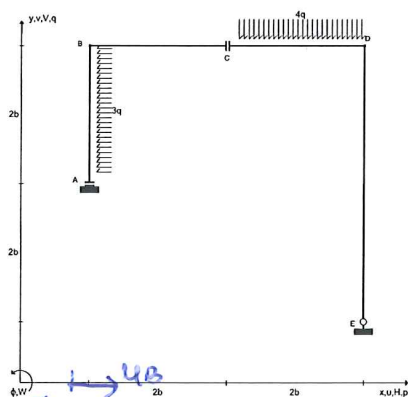
Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto D , M_D .

In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste ABC , CD , DE) si richiede di:

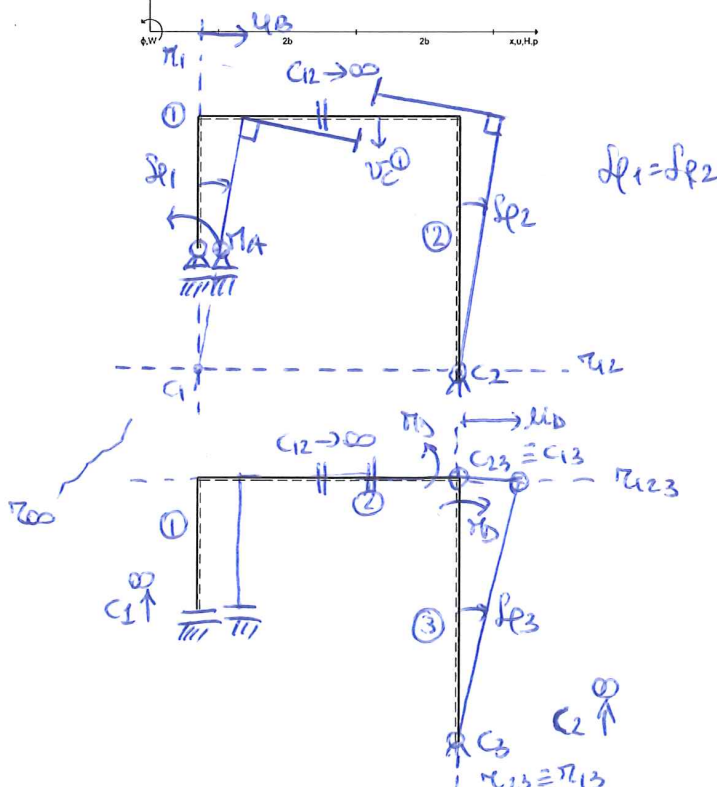
4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto D , u_D , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto B , v_B .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Università di Cagliari SdC_SdA 10.01.23'005



$$\begin{cases} C_1 \in \pi_1 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_1 \in \pi_{12} \end{cases}$$



$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in \pi_{\infty} \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 \quad C_2 \in \pi_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 \quad C_{13} \in \pi_{13} \\ C_{12} \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 \quad C_{13} \in \pi_{123} \end{cases}$$

$$M_A(\hat{s}) = -26pb^2; C_1 = (0, -2b); C_2 = (4b, -2b); C_{12} = (0, 0);$$

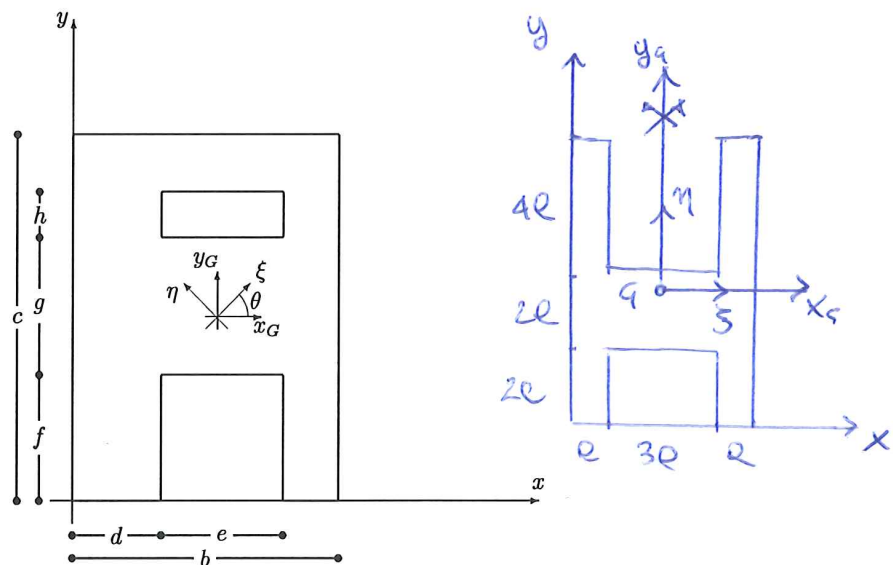
$$u_B = 4b\delta p_1; v_C^{(I)} = -2b\delta p_1;$$

$$M_D(\hat{s}) = 24pb^2; u_D = 4b\delta p_3; v_B = 0;$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: *Si noti che il disegno non è in scala!*) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 5a$; $c = 8a$; $d = 1a$; $e = 3a$; $f = 2a$; $g = 2a$; $h = 4a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del doppio dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



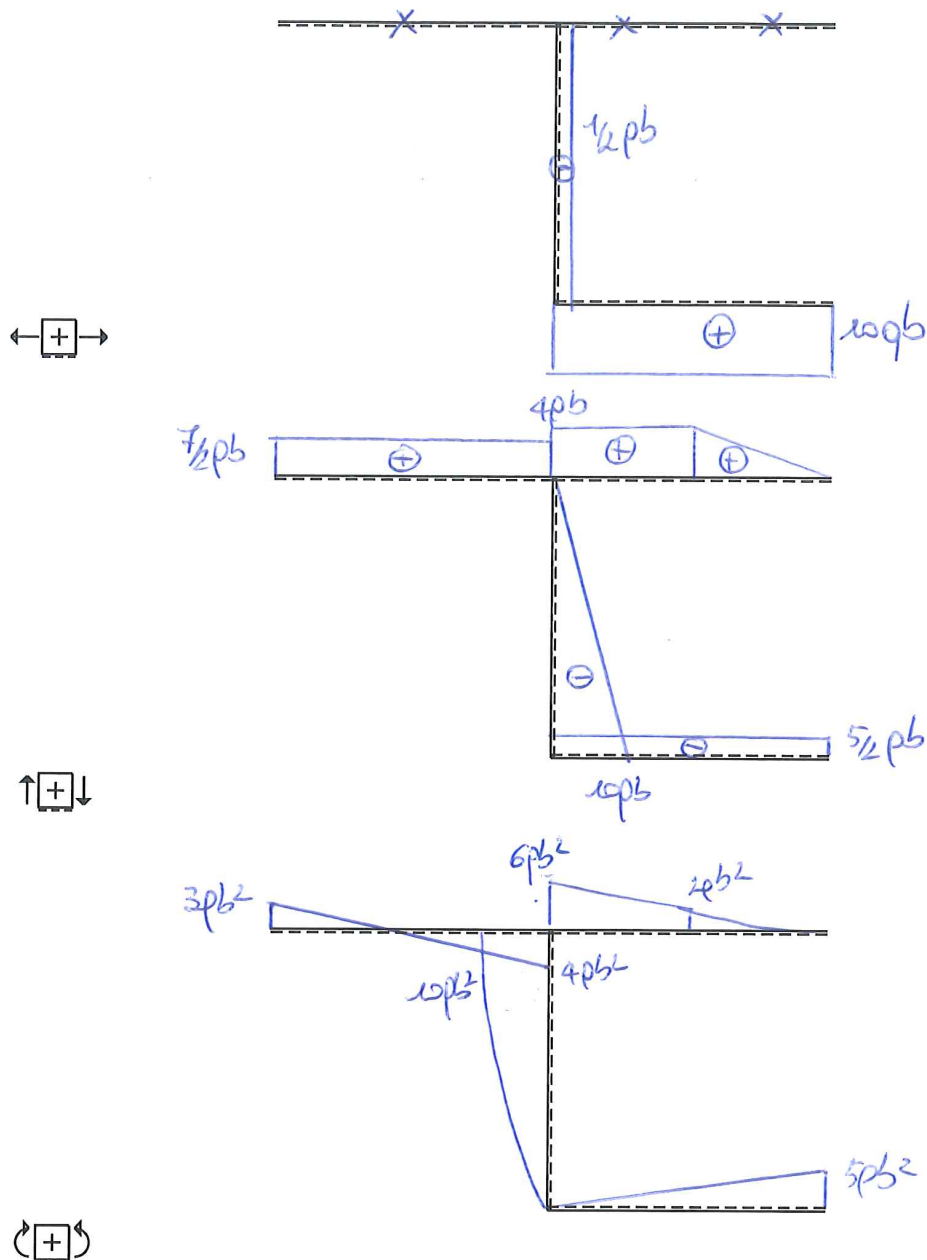
$$S_x = 82e^3; S_y = 55e^3;$$

$$x_G = 5/2 e = 2,50 e; y_G = 41/11 e = 3,727 e;$$

$$J_{xG} = 3026/33 e^4 = 91,696 e^4; J_{yG} = 418/6 e^4 = 69,633 e^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0 \quad [\psi = 0^\circ];$$

$$J_\xi = J_{\max} = 7x_4 = 3026/33 e^4; J_\eta = J_{\min} = 7y_4 = 418/6 e^4;$$



$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= 7/2 qb; & H_F (\Rightarrow) &= 10 qb; & V_F (\uparrow) &= 5/2 qb; & M_F (\curvearrowright) &= -5pb^2; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= 7/2 qb; & M_{AB} &= -3pb^2 + 7/2 pb \times 1; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= 4qb; & M_{BC} &= -6pb^2 + 4pb \times 2; \\
 N_{CD} &= 0; & T_{CD} &= 4qb - 4q \times 3; & M_{CD} &= -2pb^2 + 4pb \times 3 - 2q \times 3^2; \\
 N_{EB} &= -1/2 qb; & T_{EB} &= -10qb + 5q \times 4; & M_{EB} &= -10qb \times 4 + 5/2 q \times 4^2; \\
 N_{FE} &= 10 qb; & T_{FE} &= -5/2 qb; & M_{FE} &= 5pb^2 - 5/2 pb \times 5;
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 10.01.2023

Parte I - Testo 3

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

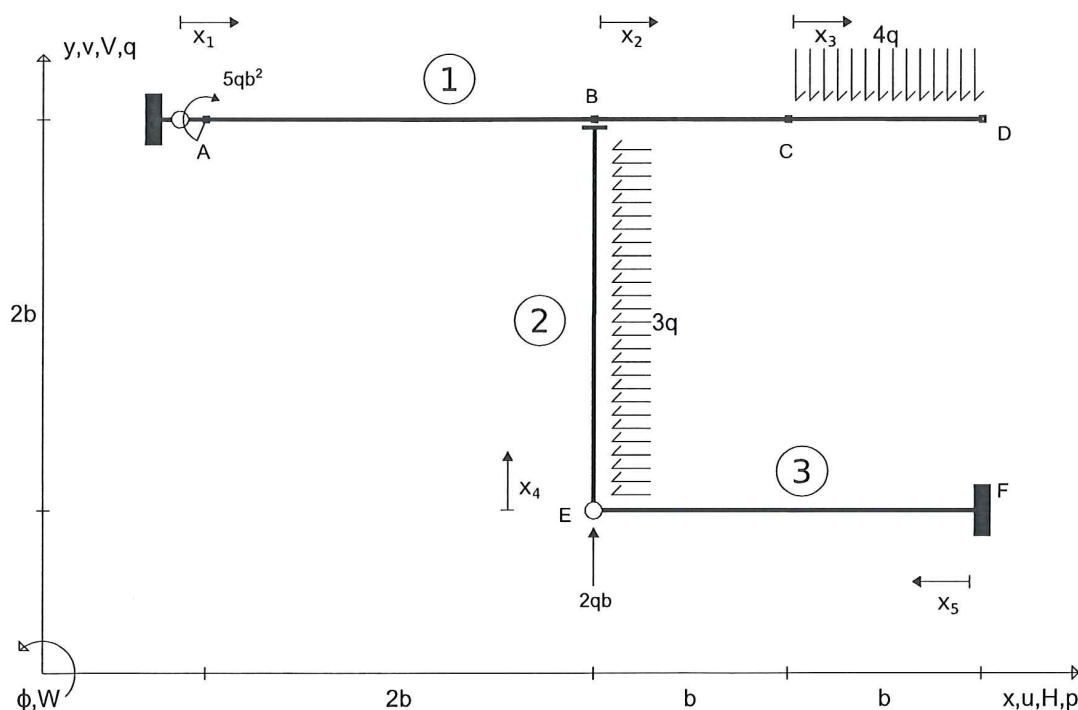
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le *equazioni* delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 10.01.23*003



EQ. AUSILIARIE:

$$\begin{cases} R_x^{(1)} = 0 & R_x^{(2+3)} = 0 \\ M_{E(E)}^{(3)} = 0 & M_{E(E)}^{(1+2)} = 0 \end{cases}$$

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_A applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1 , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2 , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12} ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto B , u_B , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto C relativa al corpo 1, $v_C^{(1)}$.

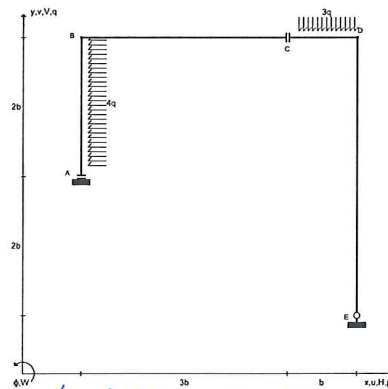
Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto D , M_D .

In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste ABC , CD , DE) si richiede di:

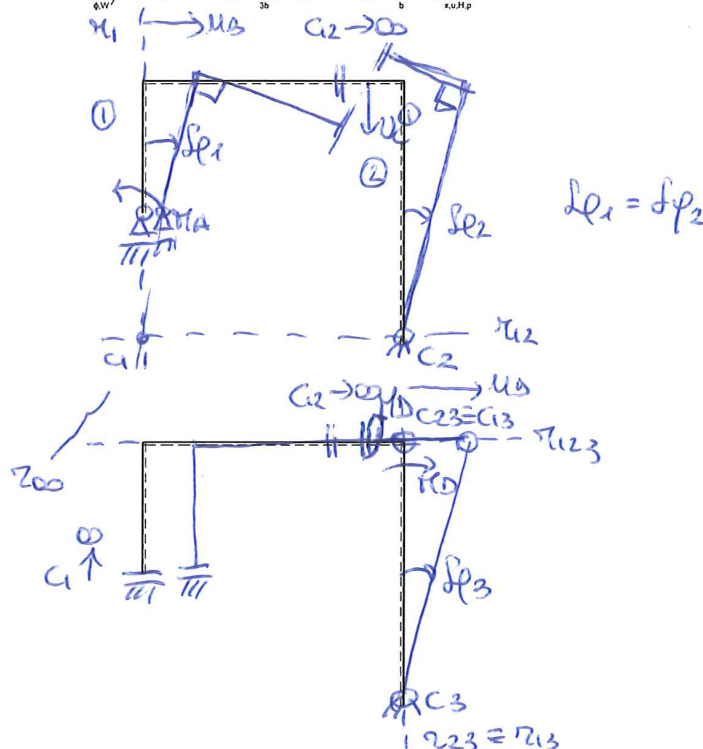
4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto D , u_D , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto B , v_B .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Università di Cagliari SdC_SdA 10.01.23*006



$$\begin{cases} C_1 \in \pi_1 \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_1 \in \pi_{12} \end{cases}$$



$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \quad C_2 \in \pi_{12} \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 \quad C_2 \in \pi_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 \quad C_3 \in \pi_{13} \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 \quad C_3 \in \pi_{23} \end{cases}$$

$$M_A(\hat{\sigma}) = -\frac{5}{2}pb^2; C_1 = (0, -2b); C_2 = (4b, -2b); C_{12} = (0, 0);$$

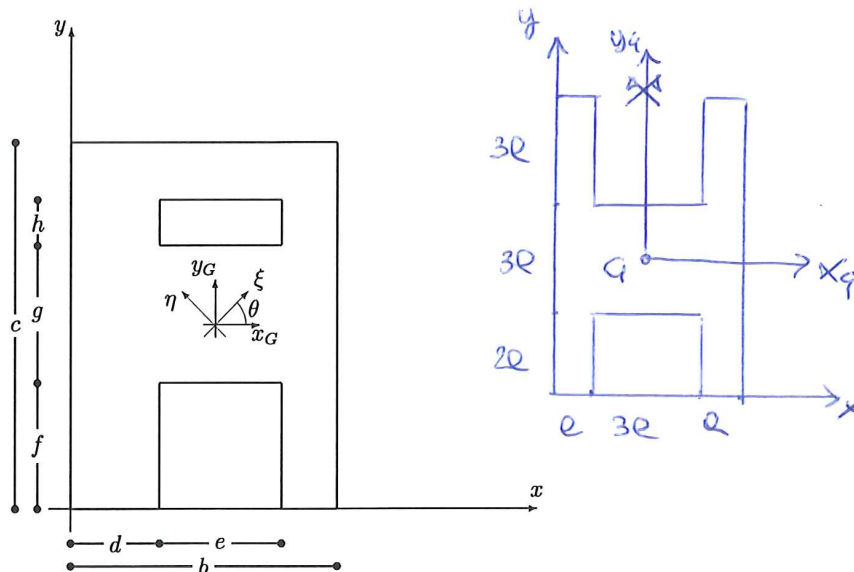
$$u_B = 4b\varphi_1; v_C^{(I)} = -3b\varphi_1;$$

$$M_D(\hat{\sigma}) = 32pb^2; u_D = 4b\varphi_3; v_B = 0;$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: *Si noti che il disegno non è in scala!*) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 5a$; $c = 8a$; $d = 1a$; $e = 3a$; $f = 2a$; $g = 3a$; $h = 3a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del doppio dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



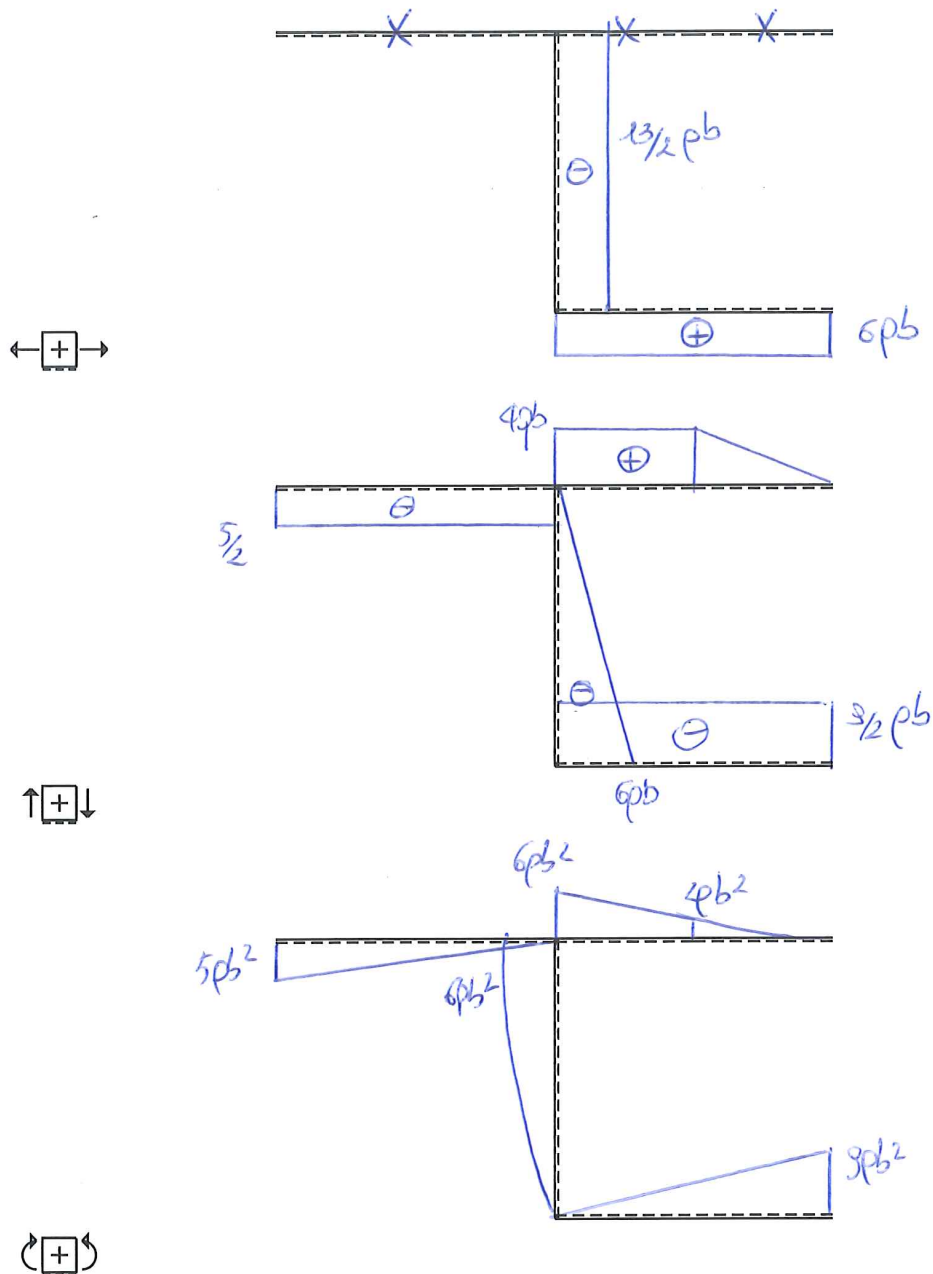
$$S_x = \frac{181}{2}a^3 = 90,5a^3; S_y = \frac{125}{2}a^3 = 62,5a^3;$$

$$x_G = \frac{5}{2}a = 2,5a; y_G = \frac{151}{50}a = 3,02a;$$

$$J_{xG} = \frac{28057}{30}a^4 = 935,23a^4; J_{yG} = \frac{865}{12}a^4 = 72,083a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0 \quad [\theta = 0^\circ];$$

$$J_\xi = J_{\max} = \frac{28057}{30}a^4; J_\eta = J_{\min} = \frac{865}{12}a^4;$$



$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= -5/2 \cdot 9b; & H_F (\Rightarrow) &= 9b; & V_F (\uparrow) &= 9/2 \cdot 9b; & M_F (\curvearrowright) &= -9 \cdot 9b^2; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= -5/2 \cdot 9b; & M_{AB} &= 5b^2 - 5/2 \cdot 9b \cdot 1; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= 4 \cdot 9b; & M_{BC} &= -6 \cdot 9b^2 + 4 \cdot 9b \cdot 2; \\
 N_{CD} &= 0; & T_{CD} &= 4 \cdot 9b - 4 \cdot 9 \cdot 3; & M_{CD} &= -2 \cdot 9b^2 + 4 \cdot 9b \cdot 3 - 2 \cdot 9 \cdot 3^2; \\
 N_{EB} &= -13/2 \cdot 9b; & T_{EB} &= -6 \cdot 9b + 3 \cdot 9 \cdot 4; & M_{EB} &= -6 \cdot 9b \cdot 4 + 3/2 \cdot 9 \cdot 4^2; \\
 N_{FE} &= 6 \cdot 9b; & T_{FE} &= -9/2 \cdot 9b; & M_{FE} &= 9b^2 - 9/2 \cdot 9b \cdot 5;
 \end{aligned}$$